С.Д. КОЛОКОЛЬЧИКОВ, Ю.В. СЕНИЧЕВ

*Институт Ядерных Исследований (Российской Академии Наук), Москва, Россия*

**ОСНОВНЫЕ АРГУМЕНТЫ В ПОЛЬЗУ ПРОХОЖДЕНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИНХРОТРОНА.**

Прохождение критической энергии требует особого внимания для сохранения устойчивости движения пучка при ускорении до энергии эксперимента. Рассмотрены возможные методы прохождения критической энергии в синхротроне на примере ускорительного комплекса NICA, расположенного в Дубне, Россия.

Ключевые слова: критическая энергия, slip-фактор, динамическая апертура, суперпериод.

S.D. KOLOKOLCHIKOV, Yu.V. SENICHEV

*Institute for Nuclear Research (Russian Academy of Science), Moscow, Russia*

**MAIN ARGUMENTS FOR CROSSING AND RAISING THE SYNCHROTRON TRANSITION ENERGY.**

The transition energy crossing requires special attention to preserve the stability of the beam during its acceleration to the energy of the experiment. Possible methods of the transition energy crossing in a synchrotron are considered as a case the NICA accelerator complex located in Dubna, Russia.

Keywords: transition energy, slip-factor, dynamic aperture, superperiod.

*Введение*

Данная работа посвящена исследованию методов прохождения и вариации критической энергии в циклических ускорительных комплексах при ускорении от энергии инжекции до энергии эксперимента.

Критическая энергия (Transition Energy) представляет из себя важную характеристику синхротрона и зависит только от магнитооптической структуры самого ускорителя. При этом, если не предпринимать никаких мер, то при пересечении критической энергии в синхротроне могут развиваются нестабильности, которые в конечном счете ведут к потере пучка. В связи с этим применяют как методы пересечения, так и методы вариации критической энергии.

Первый метод, применимый в синхротронах по сей день стал метод прохождения критической энергии с использованием быстрого изменения критической энергии при подходе к нестабильной области [1]. Для этого должна быть исследована динамика продольного движения с учетом второго порядка slip-фактора, а также влияние пространственного заряда. При этом нужно учитывать изменение динамической апертуры в широком диапазоне для различных рассмотренных схем прохождения. Само прохождение может осуществляться быстрым изменением градиента квадрупольных линз, расположенных на арках синхротрона.

Второй распространённый метод – создание магнитооптической структуры с заведомо большим значением критической энергии [2,3], таким образом может пропасть необходимость прохождения критической энергии, так как она будет заведомо больше энергии эксперимента, при этом нестабильности, связанные с движением вблизи критической энергии, не возникают вовсе. Возможно даже создание структуры с комплексным значением критической энергии, при таком подходе также пересечения критической энергии происходить не будет. Структуры таких типов были реализованы на Московской Каонной Фабрике (Россия) [4], SSC бустере (США) [5], нейтринной фабрике в CERN (Швейцария) [6] и реализован в ускорительном комплексе J-PARC (Япония) [7]. Также такой подход применен для антипротонного накопительного кольца FAIR (Германия).

*Критическая энергия*

При увеличении энергии частиц в синхротроне происходит как изменение импульса частиц, так и изменение длины траектории. Соответственно частота обращения, которая зависит от обоих этих параметров, также изменяется.

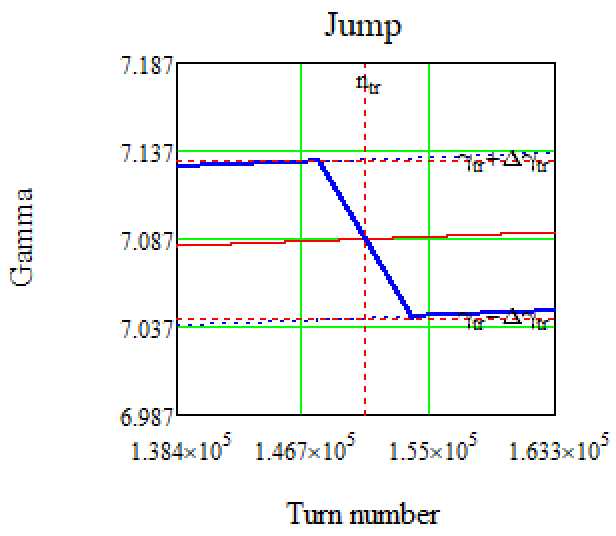
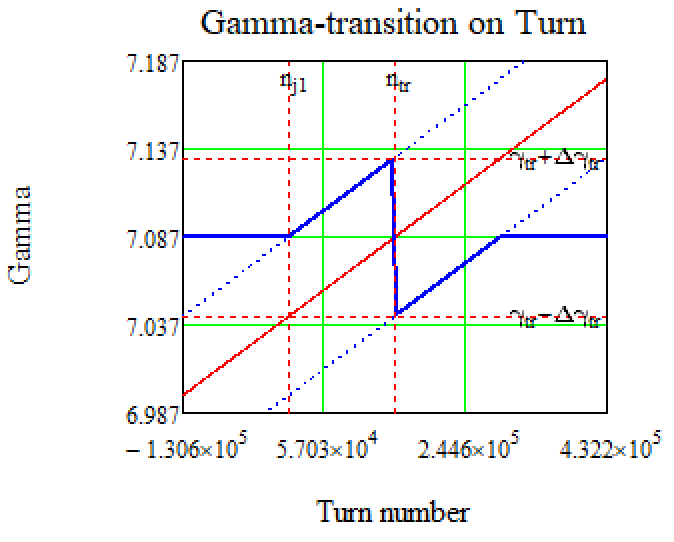
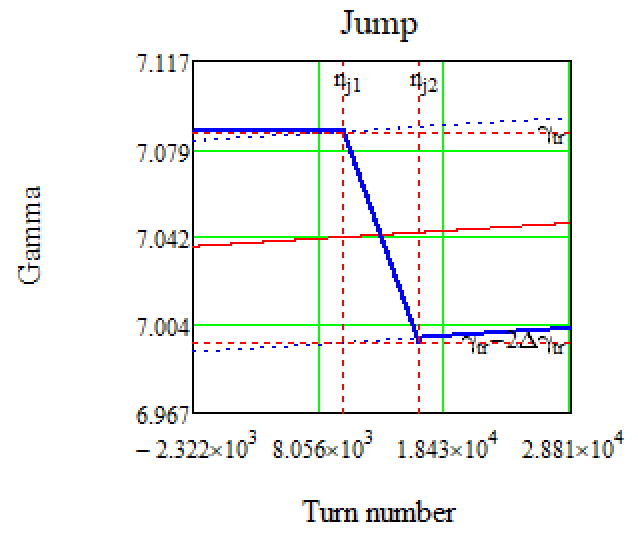
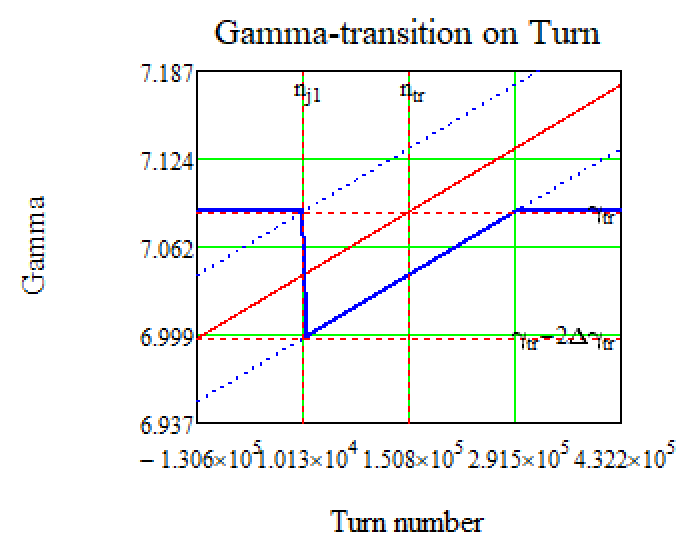
В общем случае при определении стоит учитывать разложение по степеням [8]:

При подходе к критическому значению энергии, влияние первого члена в выражении (4) начинает быть сравнимо со вторым членом. В этом случае коэффициент – slip-фактор определяется как:

Аналогично определяются и высшие порядки momentum compaction factor:

Для первых двух, наиболее значимых, порядков можно получить выражения:

*Прохождение критической энергии с помощью быстрого скачка критической энергии*

Для минимизации потерь пучка возможен быстрый скачок критической энергии, который может быть осуществлен быстрым изменением градиентов в квадрупольных линзах арки. При этом происходит изменение количества бетатронных колебаний на всей длине коллайдера, то есть сдвигается рабочая точка ускорителя.

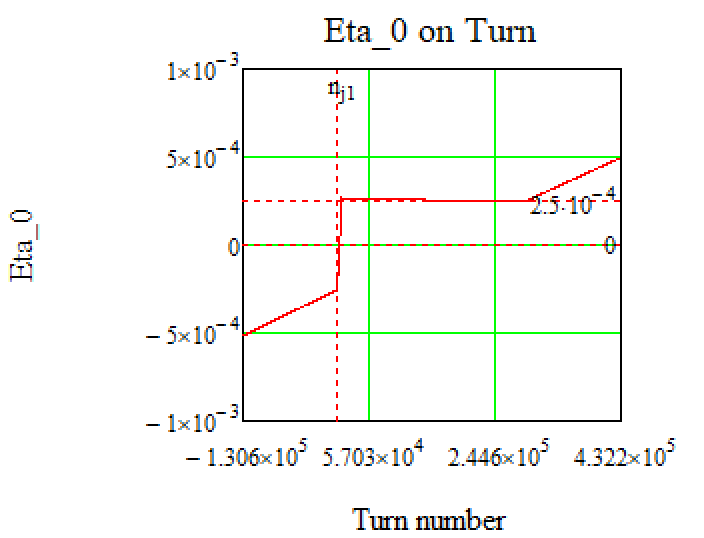
1. б)

Рисунок 1. Принципиальные схемы скачков критической энергии.

В зависимости от особенностей выбора рабочей точки для ускорителя, может отличаться и способ осуществления быстрого скачка через критическую энергию. На Рисунках 1 (а, б) представлены принципиальные схемы скачков, рассматриваемые для применения в коллайдере NICA. Данные два варианта отличаются тем, в какие рабочие точки необходимо будет смещаться в течение скачка. От рабочей точки зависит динамическая апертура, определяющая устойчивую область для движения пучка, об этом подробнее будет рассказано ниже.

Максимальный темп изменения критической энергии ограничен параметрами квадруполей и их систем питания. Для коллайдера NICA можно привести характерные значения темпа нарастания градиента поля линзы , что соответствует темпу нарастания тока . Темп изменения величины изменения критической энергии , время скачка составляет .

При моделировании процесса прохождения критической энергии учитываются два первых порядка разложения (уравнения 8,9). Соответствующие коэффициенты momentum compaction factor (MCF) зависят только от магнитооптической структуры коллайдера и могут быть вычислены с помощью программы MADX, общеиспользуемой при проектировании ускорителей.

**Зависимость slip-фактора от означает, что различные частицы имеющие разные импульсы проходят критическую энергию не одновременно. При приближении энергии к критической, значение и начинают быть сравнимы друг с другом, именно в этой области оказывает определяющее значение.

Рассмотрим скачок c учетом только первого порядка slip-фактора . Оценим значение перед непосредственным скачком, в силу симметрии относительно нуля, оно будет равно значению после (Рисунок 3)

Рисунок 2. Изменение за время скачка происходит от до

Уравнения продольного движения в координатах () дается выражениями [10,11]:

где – энергия синхронной частицы, – напряжение, создаваемое ВЧ-барьером, , – гармоническое число.

Для моделирования, в уравнениях (12) удобно перейти от производной по времени к производной по оборотам : (также учтем, что для протонов )

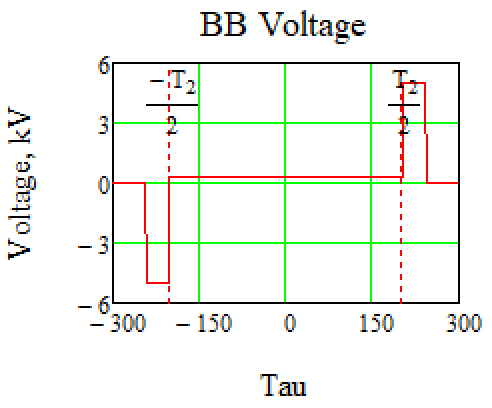
Как видно из уравнений (12, 13), важным является напряжение, создаваемое ВЧ-барьером. В коллайдере NICA для удержания, накопления и ускорения частиц до энергии эксперимента в кольцах коллайдера используется система ВЧ-1. Каждое кольцо коллайдера имеет одну систему ВЧ-1. При удержании и накоплении генерируются 2 пары прямоугольных импульсов с противоположными знаками с амплитудой каждого барьера (Рисунок 9). Временная протяженность одного импульса может варьироваться от . Накопленные частицы, заключенные между 2-мя импульсами будут индукционно ускорены постоянным потенциалом н , которое дополнительно создается также системой ВЧ-1 [13]. При ****приближении энергии к критическому значению ВЧ-барьеры выключаются и, после того как энергия протонов становится больше критической энергии, ВЧ-барьеры включаются с изменением полярности. Это необходимо так как значение slip-factor меняет знак при прохождении критической энергии. С одной стороны, при нулевом значении slip-factor система изохронна и при любом разбросе по импульсам сгусток не увеличивает длину. С другой стороны, начинает играть существенную роль следующий порядок η, который искажает движение и может привести к росту разброса по импульсу. И наконец, при отсутствии фокусировки в продольной плоскости пространственный заряд может внести большие искажения в фазовый портрет сгустка.

Рисунок 3. Напряжение, создаваемое ВЧ-станцией типа Barrier Bucket

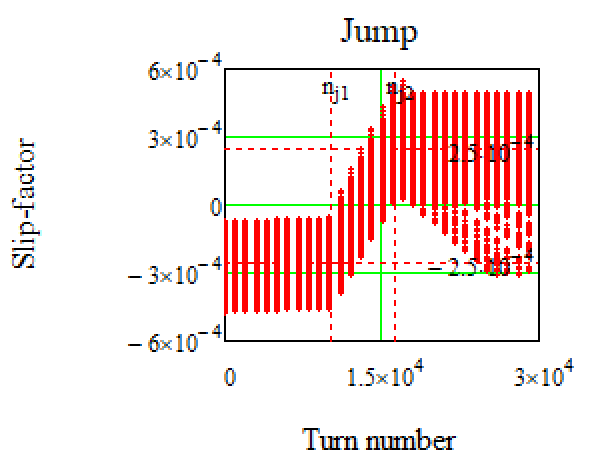
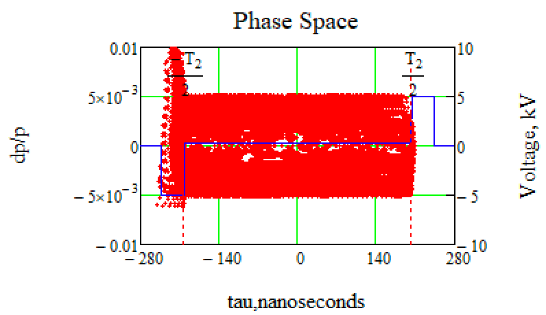
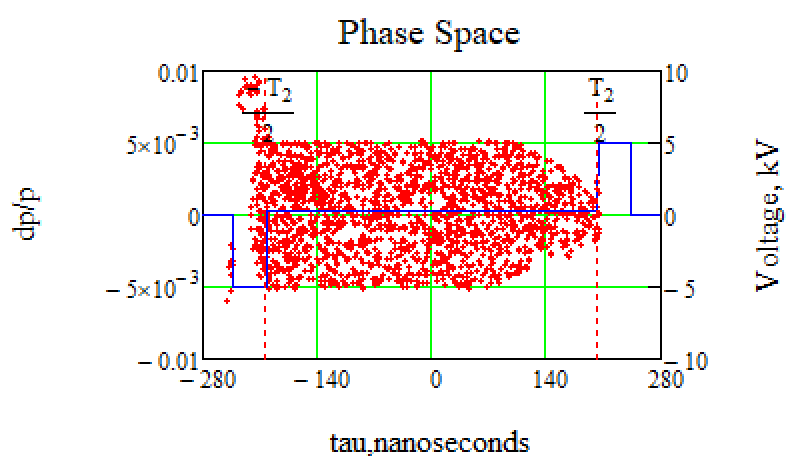
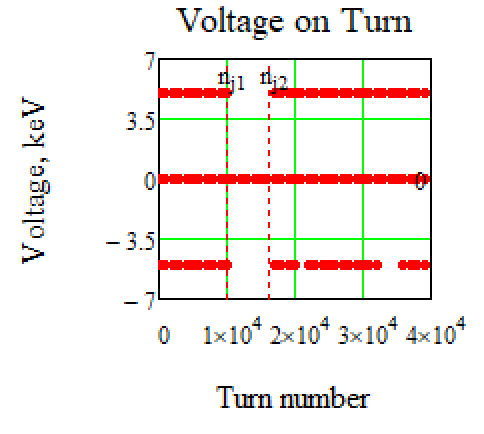
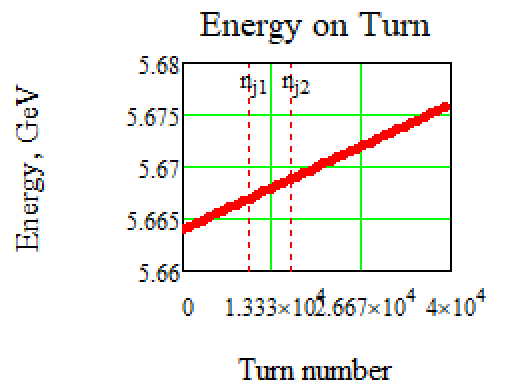
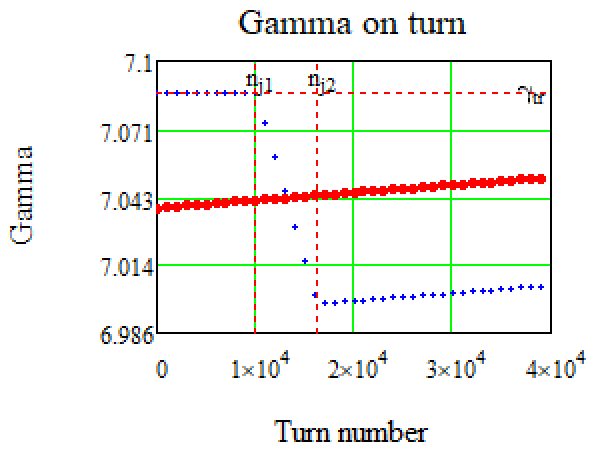
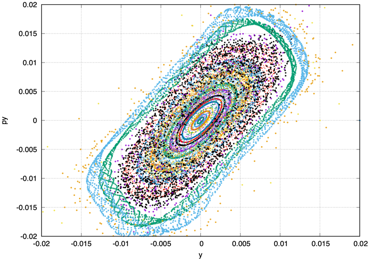
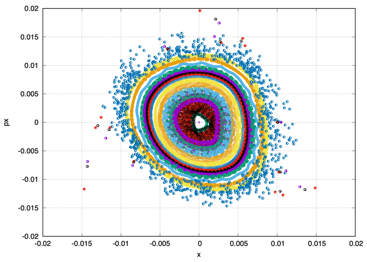
Как видно на Рисунке 7(в), происходит скачок slip-фактора в разное время для разных частиц из-за зависимости slip-factor от . Очевидно, после скачка частицы с отрицательным значением slip-фактора не будут находится в устойчивой области, так как изменяется полярность удерживающих барьеров и будут стремится покинуть фазовую плоскость, что видно на Рисунках 7(а, б). Также из-за разброса по импульсам наблюдается несимметричность фазового портрета относительно нулевого значения разброса импульсов .

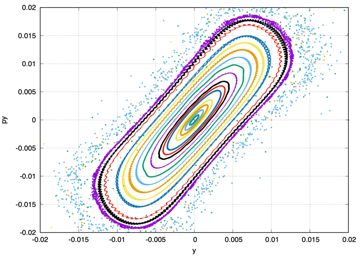
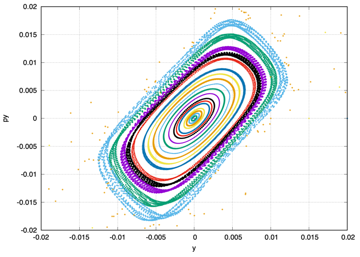
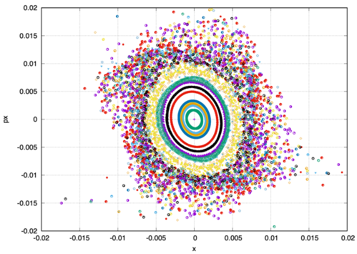
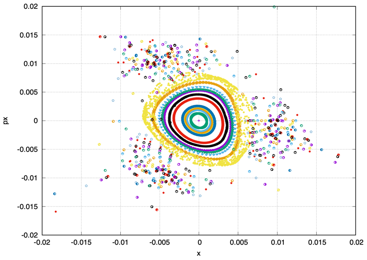
Рисунок 4. Прохождение критической энергии скачком с учетом второго порядка slip-фактора

а) Размытие фазовой проскости б) фазовая плоскость после скачка  
в) Скачок slip-фактора (скачок происходит от до ); г) напряжение ВЧ-барьеров, при скачке напряжение барьеров отсутствуют, д) изменение энергии частиц, е) непосредственный скачок кртической энергии (синие точки), – гамма частиц(красные точки)

При изменении рабочей точки важно следить за изменением динамической апертуры как до, так и после скачка. Необходимо убедиться в том, чтобы динамическая апертура была оптимальной для обеспечения устойчивости пучка.

Изменение критической энергии возможно за счет изменения частоты бетатронных колебаний в -плоскости, что достигается изменением градиента фокусирующих линз в арках коллайдера. При измененных параметрах квадрупольных линз оценивалась динамическая апертура, которая имеет ключевое значение с точки зрения устойчивости пучка в поперечной плоскости. Соответствующие вычисления проводились с использованием программ OptiM и MADX.



Результаты, показанные на Рисунке 4(a), говорят о том, что рабочая точка выбрана неоптимальной, поскольку динамическая апертура в вертикальной плоскости уже изначально мала при этих рабочих значениях. Более того, если следовать тому, что при подходе к критической энергии мы вынуждены уйти вниз по частоте в горизонтальной плоскости до значений , а в вертикальной плоскости , чтобы получить критическую энергию , то динамическая апертура в горизонтальной плоскости при этих значениях бетатронных частот полностью исчезает.

Поэтому возможен вариант альтернативного скачка, вариант (см. Рисунок 1a): сначала плавно поднимаем критическую энергию до величины , затем производим быстрый скачок вниз на до величины . При этом рабочая точка изменяется от до величины перед скачком (см. Рисунок 4б) и после скачка вниз (см. Рисунок 4в).

Рисунок 5. Динамические апертуры (слева –плоскость, справа –плоскость) для разных рабочих точек при с подавленной натуральной хроматичностью в кольце коллайдера с учетом влияния краевых секступольных компонент магнитов и соленоидов. По оси абсцисс – координата в метрах, по оси ординат – относительный импульс в радианах.

## а) ; б) ;

## в)

*Метод создания магнитооптической структуры с высокой критической энергии*

Данный метод отличается тем, что необходимо внести изменение в саму магнитооптическую структуру синхротрона. Это возможно путем введения специальной суперпериодической модуляции градиентов квадрупольных линз на арках.

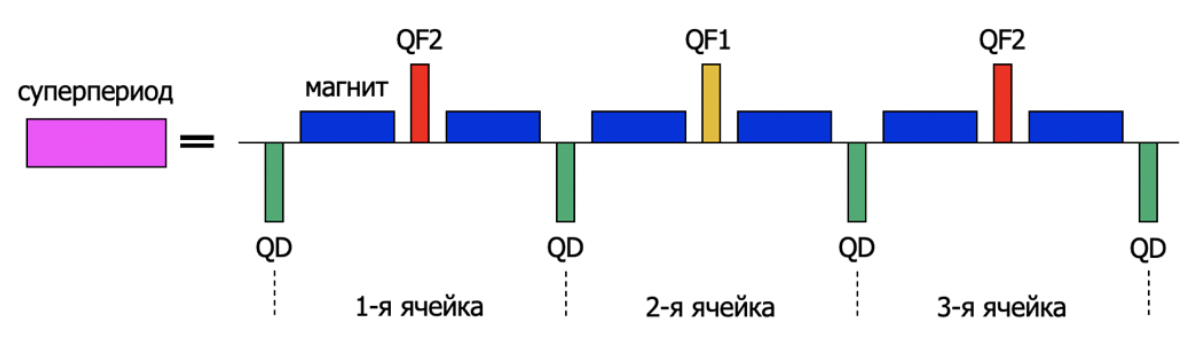
Из выражения (14) видно, что значение критической энергии зависит как от дисперсионной функции , так и от функции кривизны орбиты . Последняя зависит от расстановки дипольных магнитов. Таким образом, внесение изменений в машину возможно только при изначальном проектировании. Дисперсионная функция же зависит от квадрупольных линз и может быть изменена путем введения суперпериодической модуляции даже в уже созданных синхротронах.

Рисунок 6. Принципиальная схема одного суперпериода, состоящего из 3-х ФОДО ячеек.

Общие принципы проектировки резонансных магнитооптических структур основаны на решении уравнения для дисперсионной функции с бипериодической переменной фокусировкой:

где , ,  *–* градиент магнитооптических линз, – суперпериодическая модуляция градиента, – импульс частицы.

Суперпериод определяется как совокупность нескольких ФОДО ячеек как изображено на Рисунке 8. Таким образом, в общем случае коэффициент расширения орбиты зависит от функций: кривизны орбиты , градиента и модуляции cответственно , . Как уже было упомянуто, в структуре NICA регулярная расстановка отклоняющих магнитов исключает возможность модуляции кривизны орбиты. Поэтому мы используем только модуляцию силы квадрупольных линз по длине суперпериода. Функция имеет периодичность одного периода ФОДО ячейки , имеет периодичность суперпериода *..* Другим словами, подобные структуру имеют бипериодическую составляющую, где . Кривизна орбиты имеет периодичность, совпадающую с длиной суперпериода,.

Для решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (15) сначала находятся фундаментальные решения соответствующего однородного уравнения. Затем применяя метод вариации постоянной получается частное решение. Поскольку суперпериод зеркально симметричен, то выражение при разложении в ряд Фурье содержит только слагаемые с косинусами, где . Учитывая это, дальнейшее решение однородного уравнения находится методом Боголюбова–Митропольского. Для конечного же решения неоднородного уравнения нужно также учесть, что в силу зеркальной симметрии для кривизны орбиты: , где . Таким способом получаются выражения для дисперсионной функции и функции кривизны орбиты , необходимые для вычисления коэффициента расширения орбиты для решеток с модуляцией градиентов и кривизны орбиты. Согласно уравнению (14), коэффициент расширения орбиты определяется средним значением функции . Функции и можно также представить в виде их среднего значения и колеблющегося возмущения около среднего значения , , поэтому

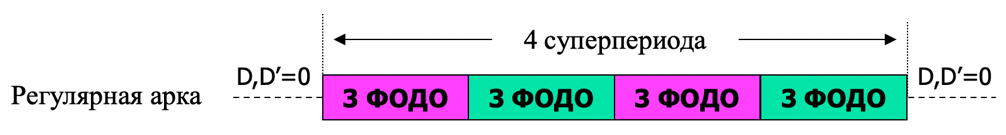
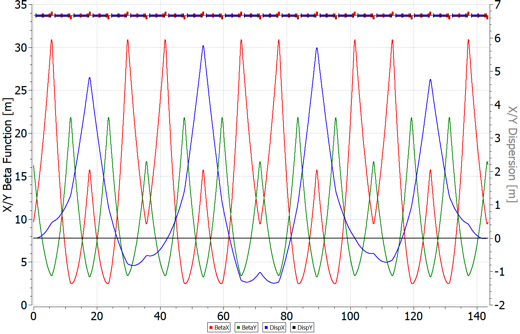
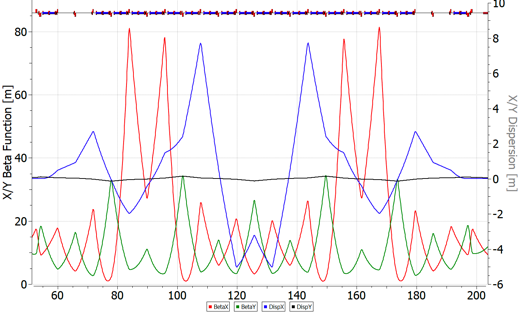
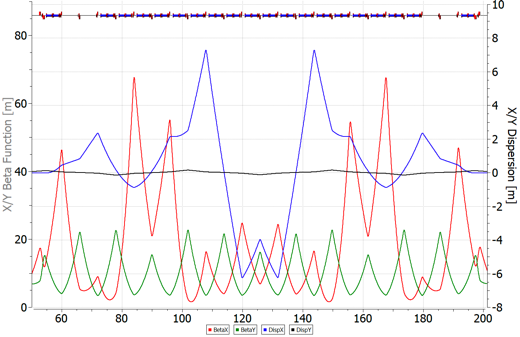
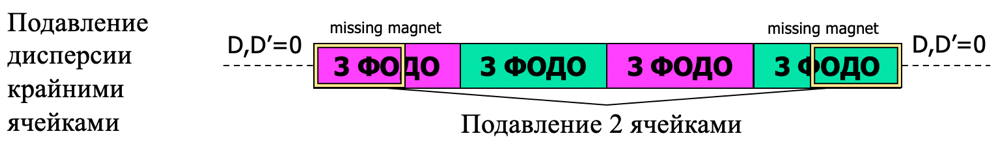
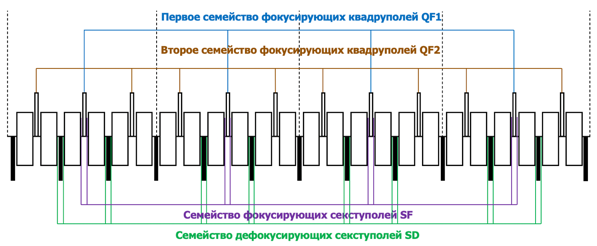
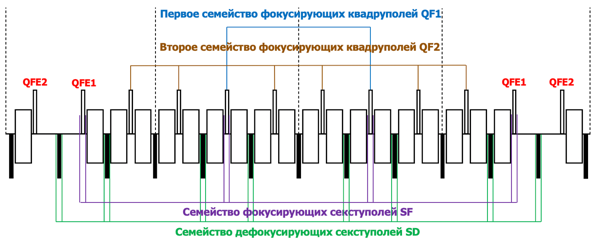
В структурах без модуляции градиента и кривизны орбиты , выражение для дисперсии имеет вид и представляется выражением для обычных структур с периодической модуляцией (без суперпериодической модуляции). А значение коэффициента расширения орбиты (14) определяется только первым членом , так как , среднее значение дисперсии в этом случае . Таким образом, для таких структур коэффициент расширения орбиты определяется частотой бетатронных колебаний и его изменение сильно ограничено.

Ситуация кардинально меняется в случае модуляции градиента и кривизны орбиты. Произведя все вычисления получено выражение для коэффициента расширения орбиты одного суперпериода и определяется по формуле (17), полный вывод данной формулы произведен в работе [3]:

Где усредненное значение кривизны, – количество горизонтальных бетатронных колебаний на длине арке, S – количество суперпериодов на длине арки, –-ая гармоника модуляции градиента при разложении функции в ряд Фурье . В силу зеркальной симметрии разложение произведено по косинусам. В случает отсутствия суперпериодической модуляции , формула (17) принимает вид , что соответствует случаю регулярной структуры. Для поднятия критической энергии необходимо уменьшить , а значит выражение под знаком суммы должно быть отрицательным, это реализуемо при условии . Первая гармоника является определяющей и для 12 ФОДО ячеек реализуемо *резонансное* условие , , где 3 ФОДО ячейки объединены в один суперпериод. Таким образом, благодаря набегу бетатронных колебаний кратному 2π арка имеет свойства ахромата первого порядка.

Ранее все формулы были приведены для арки, а не для всего кольца коллайдера. Введение прямых участков уменьшает степень модуляции дисперсионной функции. Усреднение дисперсии по более длинной орбите автоматически уменьшает ее значение, а значит уменьшает коэффициент уплотнения орбиты для всего ускорителя, результирующее значение критической энергии увеличивается и определяется выражением:

*Особенности подавления дисперсии*

Для обеспечения движения частиц вдоль равновесной орбиты синхротрона на прямолинейных участках необходимо обеспечить нулевое значение дисперсии. Это легко реализуемо в случае создания полностью регулярной арки.

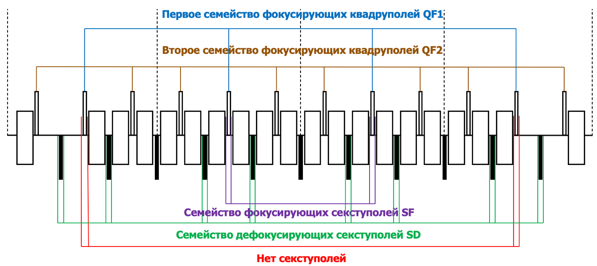


Рисунок 7. Схема арок коллайдера для регулярной структуры и структур с missing magnet (крайний суперпериод имеет missing magnet). Приведена расстановка квадруполей и секступолей. Также приведены Twiss-функции с подавленной дисперсией.

Как видно на Рисунках 9 дисперсия подавлена автоматически в силу выбора кратного π набегу колебаний на арке и является примером ахромата первого порядка. Не всегда арки остаются регулярными, это может быть обусловлено, например, особенностью инжекции частиц в кольцо синхротрона, при которой используется метод missing magnet, когда отсутствует дипольный магнит в ФОДО ячейке. При этом возникает нерегулярность из-за не кратного π набега бетатронных колебаний, и появляется необходимость дополнительного подавления дисперсии при выходе из арки. В связи с этим можно рассматривать разные методы:

1. Использовать для подавления крайние ячейки (Рисунок 11.1) Подавление дисперсии происходит при помощи крайних суперпериодов. А именно двух крайних ФОДО ячеек. На Рисунке 13 (б) (Edge Suppressor – ES) изображена принципиальная схема данной магнитооптической структуры. Как видно две крайние ФОДО ячейки отличаются наличием missing-magnet и в этих ячейках квадруполи QFE1 и QFE2 также имеют отличные градиенты от основных квадруполей арки и подбираются таким образом, чтобы подавить дисперсию.
2. Подавлять при помощи только двух семейств квадруполей (Рисунок 11.2). Данный подход не предполагает наличия отличных квадруполей, что упрощает как само устройство арки, так как используется только 2 семейства квадруполей, так и систему питания (Рисунок 13 (в)). Однако, в этом случае из-за нерегулярности невозможно обеспечить набег бетатронных колебаний на арке кратный π, другими словами, невозможно создания ахромата первого порядка.

*Коррекция хроматичности*

Корректирующие секступоли в первую очередь должны обеспечивать подавление естественной хроматичности, обусловленной линейными элементами – квадруполями и диполями. Для этого секступоли устанавливают в области ненулевой дисперсии на арках вблизи квадруполей.

Естественная хроматичность возникает из-за того, что сила фокусировки квадруполей обратно пропорциональна и, следовательно, обратно пропорциональна импульсу .

Выражение для сдвига частоты содержит натуральную хроматичность в скобках:

Для её коррекции используются секступоли, для которых

Таким образом можно скомпенсировать натуральную хроматичность при помощи секступолей, так как и имеют обратные знаки. [12] При расстановке секступолей нужно учесть, что подавление хроматичности необходимо обеспечить в обеих плоскостях *, .* Секступоли вблизи фокусирующих квадруполей QF в основном влияют на , так как значение бета-функции в этих местах большое. Аналогично для дефокусирующих, секступоли в основном влияют на . А значит можно подавить хроматичность всего двумя семействами квадруполей SF и SD, расположенных соответственно рядом с фокусирующими и дефокусирующими квадруполями.

При создании арки со свойством ахромата первого порядка, при правильной расстановке секступолей можно добиться создания арки со свойством ахромата второго порядка. Это означает, что будет выполняться взаимная компенсация секступолей. Создание такой арки обеспечит высокое значение динамической апертуры, так как все нелинейные эффекты будут скомпенсированы.

Таким образом, при расстановке секступолей также нужно учесть несколько параметров:

1. Во-первых, необходимо подавить хроматичность на всем кольце коллайдера;
2. Во-вторых, для достижения большего значения динамической апертуры нужно добиться взаимной компенсации секступолей и по возможности создать ахромат 2 порядка.

Для выполнения первого условия, нужно подавить естественную хроматичность, обусловленную линейным элементами – квадруполями и диполями. Для этого необходимо установить секступоли в области ненулевой дисперсии – на арках вблизи квадруполей.

Для случая подавления диспепсии крайними ячейками (Рисунок 13 (б)) набег фазы на арке . Таким образом на каждом суперпериоде набег фазы , в том числе и на крайних. В описанном случае возникают пики -функции на арке на квадруполях QF2. Тем самым разность фаз между квадруполями QF2 первого и третьего (второго и четвертого суперпериода) не кратна . При этом количество бетатронных колебаний между центральными квадруполями (QF1 или QFE1) 1 и 3 или 2 и 4 суперпериодов . Таким образом, расставив секступоли одного семейства рядом с центральными квадруполями, получится обеспечить взаимное подавление секступолей.

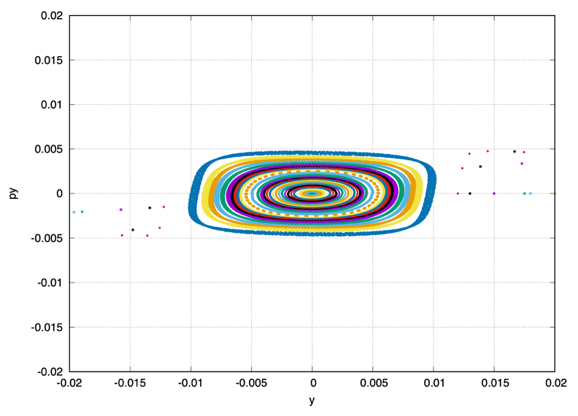
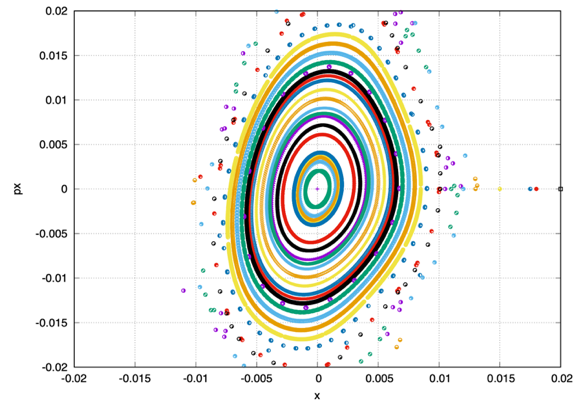
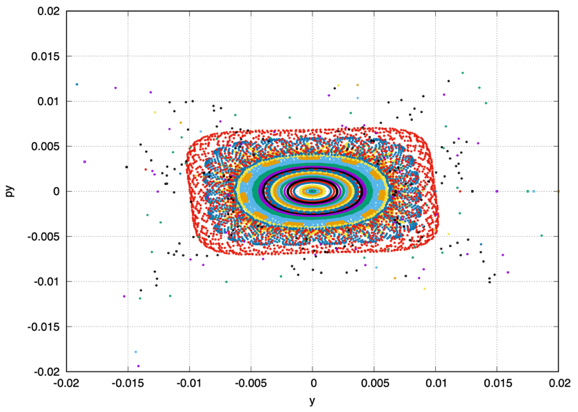
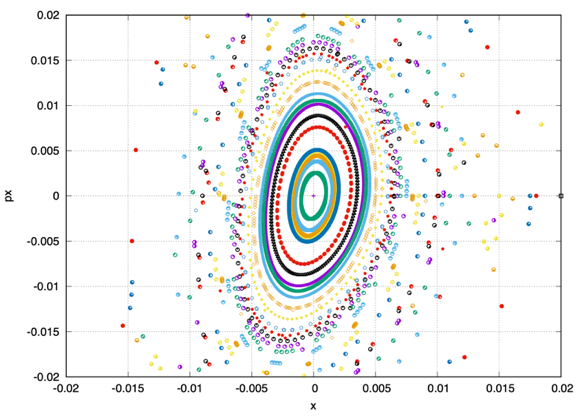
**При подавлении диспепсии только двумя семействами (Рисунок 13 (в)), в силу того что набег на арке не кратен , а также между центральными квадруполями не кратен , а равен получается, что секступоли не компенсируют друг друга в точности. Расстановка секступолей для этого случая отлична от расстановки секступолей при наличии подавителей дисперсии на краях арки, Рисунок 20. Семейство SF устанавливаться рядом c центральными квадруполями суперпериода QF1, а SD рядом с дефокусирующими квадруполями QD, но только теми, которые окружают QF1 слева и справа. Однако, в крайних суперпериодах секступоли фокусирующего семейства отсутствуют. Это сделано для уменьшения влияния секступолей на динамическую апертуру. Подавление же хроматичности возможно и без них, так как основной вклад вносят секступоли 2 и 3 суперпериода.

Рисунок 8. Динамические апертуры для различных случаев подавления дисперсии в синхротроне. Для .

Нескомпенсированность нелинейных эффектов может привести к тому, что динамическая апертура будет неоптимальной для обеспечения области устойчивого движения пучка. На Рисунках 14 изображены динамические апертуры в обоих плоскостях для разных случаев подавления дисперсии. Видно, что введение дополнительных подавителей дисперсии создает существенную нелинейность (Рисунок 14 (а)) по сравнению с подавлением диспепсии только двумя семействами квадруполей. Однако, при этом необходима более глубокая модуляция дисперсионной функции и соответственно увеличение значения градиентов квадрупольных линз. В конечном счете вопрос оптимизации рабочей точки требует отдельного детального изучения.

*Заключение*

В данной работе рассмотрены методы, которые развились и применяются в ускорительных технике и могут быть использованы при проектировании синхротрона. Проблема прохождения критической энергии связна с теми нестабильностями, которые, в силу различных эффектов, могут приводить к потере пучка.

Метода прохождения с использованием быстрого изменения критической энергии. Исследуется динамика продольного движения с учетом второго порядка коэффициента скольжения (slip-фактора), а также влияние пространственного заряда. Благодаря быстрому скачку критической энергии, существенно сокращается время, при котором частицы находятся вблизи нулевого значения первого порядка slip-фактора. Изменение критической энергии осуществляется с помощью изменения в x-плоскости набега фазы бетатронных колебаний за счет соответствующего изменения градиента фокусирующих квадрупольных линз в арках.

Метод поднятия критической энергии, он же метод создания резонансной магнитооптической структуры, заключается в том, чтобы заведомо поднять значение критической энергии выше энергии эксперимента, либо даже добиться комплексного значения. Такая магнитооптическая структура требует введения суперпериодов, состоящих из 3-х ФОДО ячеек, на арках синхротрона путем модуляции градиентов квадрупольных линз, что и вносит изменение в дисперсионную функцию и в конечном счёте влияет на значение критической энергии.

Вне зависимости от рассматриваемого метода, при проектировании уделяется особое внимание выбору рабочей точки, таким образом, чтобы величина динамической апертуры была оптимальной для обеспечения области стабильного движения. При прохождении с использованием быстрого изменения критической энергии нужно также учитывать, что область стабильности должна сохраняться в широком диапазоне набега бетатронных колебаний на кольце синхротрона для выбранной схемы прохождения.

**Список литературы**

1. T.Risselada, Gamma Transition Jump Schemes, CERN-94-01, p 313.
2. Yu. V. Senichev and A. N. Chechenin. Construction of “Resonant” Magneto-Optical Lattices with Controlled Momentum Compaction Factor Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2007, Vol. 105, No. 6, pp. 1141–1156.
3. Yu. V. Senichev and A. N. Chechenin. Theory of “Resonant” Lattices for Synchrotrons with Negative Momentum Compaction Factor. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2007, Vol. 105, No. 5, pp. 988–997
4. N. I. Golubeva, A. I. Iliev and Yu. V. Senichev, INR, Moscow, Nonlinear Dynamics in The Booster of The Moscow KAON Factory, IEEE 1991.
5. E.D.Courant, A.A.Garren, U.Wienands, Low Momentum Compaction Lattice Study For The SSC Low Energy Booster, PAC 1991.
6. B. Autin, R. Cappi, J. Gareyte, R. Garoby, M. Giovannozzi, H. Haseroth, M. Martini, E. Métral, W. Pirkl, H. Schönauer, CERN, Geneva, Switzerland, C.R. Prior, G.H. Rees, RAL, Chilton, Didcot, U.K., I. Hofmann, GSI, Darmstadt, Yu. Senichev, FZJ, Jülich, Germany, A Slow-Cycling Proton Driver for A Neutrino Factory, Proceedings, 7th European Conference, EPAC 2000, Vienna, Austria, June 26-30, 2000. Vol. 1-3
7. Y.Mori, Y.Ishi, M.Muto, H.Nakayama, C.Ohmori, S.Shibuya, T.Tanabe, M.Tomizawa, INS University of Tokyo, Synchrotron Design Issues Of The Japanise Hadron Project, EPAC 96.
8. K. Y. Ng. Physics of Intensity Dependent Beam Instabilities, Fermilab-FN-0713, 2002
9. J.L. Laclare, ESRF, Grenoble, France. Coasting Beam Longitudinal Coherent Instabilities, CAS - CERN Accelerator School: 5th General Accelerator Physics Course.
10. J. Wei and S. Y. Lee. Space Charge Effect at Transition Energy and The Transfer of R.F. System at Top Energy, BNL–41667
11. Hans Stockhorst, Takeshi Katayama, Rudolf Maier. Beam Cooling at COSY and HESR Theory and Simulation – Part 1 Theory. Forschungszentrum Jülich GmbH Zentralbibliothek, Verlag Jülich. ISBN 978-3-95806-127-9(2016) p161-171.
12. A. Verdier, CERN, Geneva. Chromaticity. CAS - CERN Accelerator School: 5th General Accelerator Physics Course.
13. Syresin, E. M., Butenko, A. V., Zenkevich, P. R., Kolokolchikov, S. D., Kostromin, S. A., Meshkov, I. N., Mityanina, N. V., Senichev, Y. V., Sidorin, A. O., & Trubnikov, G. V. (2021). Formation of Polarized Proton Beams in the NICA Collider-Accelerator Complex. Physics of Particles and Nuclei, 52(5), 997-1017. <https://doi.org/10.1134/S1063779621050051> p22-26